Chapitre 8
Risque et variance

Exercice 8.1

a)

$$W' = W + \varepsilon\big|_{W=9} = \begin{cases} 8 & 10 & 11 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{cases}$$

b)

$$E(W') = E(W) + E\left(\varepsilon\big|_{W=9}\right) = E(W)$$
$$V(W') = V(W) + V\left(\varepsilon\big|_{W=9}\right) > V(W)$$

c) Il faut que $\varepsilon\big|_{W=9}$ prenne au moins une valeur positive supérieure à 2, par exemple 3. Il faut également que l'espérance de $\varepsilon\big|_{W=9}$ soit nulle. Il existe une infinité de variables aléatoires satisfaisant ces deux conditions, par exemple

$$\varepsilon\big|_{W=9} = \begin{cases} -6 & 0 & 3 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{cases} \qquad \varepsilon\big|_{W=9} = \begin{cases} -1 & 0 & 3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{cases}$$

d) Notons $F(t)$ la fonction de répartition de W et $G(t)$ celle de W'.

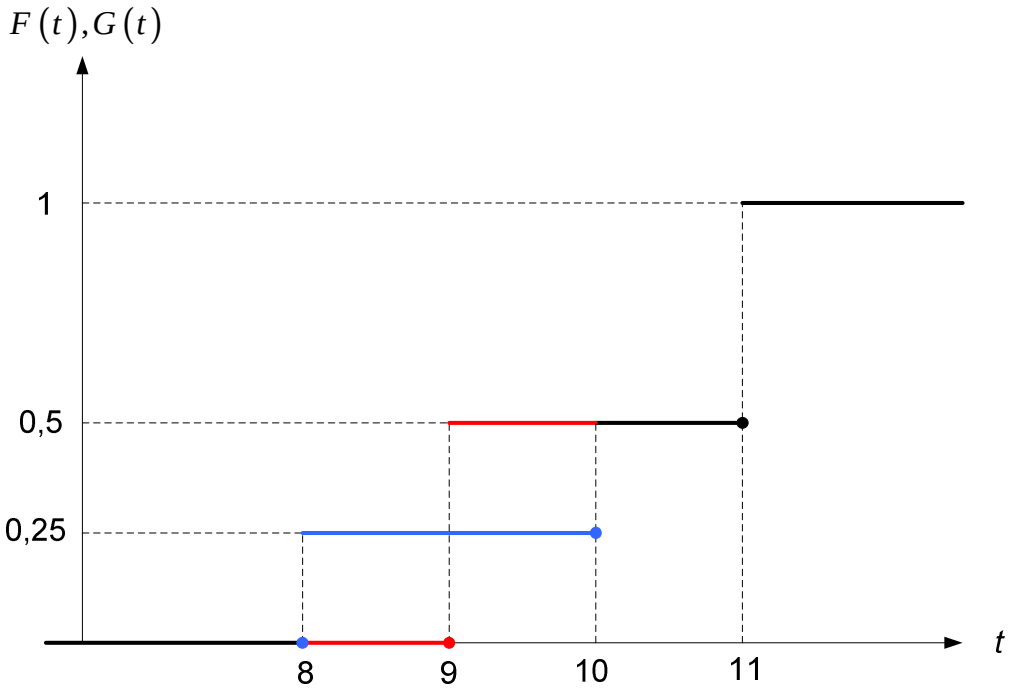

Figure E8.1 – En noir, le graphe lorsqu'il est commun à $F(t)$ et à $G(t)$. En rouge, le graphe de $F(t)$ lorsqu'il est distinct de celui de $G(t)$. En bleu, le graphe de $G(t)$ lorsqu'il est distinct de celui de $F(t)$.

1. Pour $s \le 8$, $\int_{-\infty}^{s} F(t)\,dt = 0$ et $\int_{-\infty}^{s} G(t)\,dt = 0$. Donc pour $s \le 8$, $\int_{-\infty}^{s} F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{s} G(t)\,dt$.

2. Pour $s \le 9$, $\int_{-\infty}^{s} F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{8} F(t)\,dt + \int_{8}^{s} F(t)\,dt = 0$ et $\int_{-\infty}^{s} G(t)\,dt = \int_{-\infty}^{8} G(t)\,dt + \int_{8}^{s} G(t)\,dt = 0 + (s-8)0,25 > 0$. Donc pour $s \le 9$, $\int_{-\infty}^{s} F(t)\,dt \le \int_{-\infty}^{s} G(t)\,dt$.

3. Pour $s \le 10$, $\int_{-\infty}^{s} F(t)\,dt = \int_{-\infty}^{9} F(t)\,dt + \int_{9}^{s} F(t)\,dt = 0 + (s-9)0,5$ et $\int_{-\infty}^{s} G(t)\,dt = \int_{-\infty}^{8} G(t)\,dt + \int_{8}^{9} G(t)\,dt + \int_{9}^{s} G(t)\,dt = 0 + 0,25 + (s-9)0,25$. Or

$$s \le 10$$
$$0,25s \le 2,5$$
$$0,5s - 4,5 \le 0,25s - 2$$
$$(s-9)0,5 \le 0,25 + (s-9)0,25$$

Donc pour $s \le 10$, $\int_{-\infty}^{s} F(t)\,dt \le \int_{-\infty}^{s} G(t)\,dt$.

4. Pour $s > 10$, les deux courbes sont confondues. Par conséquent, pour tout s, $\int_{-\infty}^{s} F(t)\,dt \le \int_{-\infty}^{s} G(t)\,dt$. L'inégalité est stricte sur l'intervalle $]8;10[$. Donc la condition (8.1) est satisfaite.

Exercice 8.2

$$W' = W + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon\Big|_{W=w_i}$$

$$E(W') = E(W) + \sum_{i=1}^{m} E\left(\varepsilon\Big|_{W=w_i}\right) = E(W)$$

Exercice 8.3

a) Si la dérivée la dérivée troisième u''' est nulle,

$$U(W) = E(W) + \frac{V(W)}{2} u''(E(W))$$

La fonction d'utilité est donc une fonction à deux arguments et ces deux arguments sont l'espérance et la variance de la richesse, ce qui est la définition d'une fonction de Markowitz.

b) Les seules fonctions dont la dérivée troisième est la constante 0 sont les fonctions dont la dérivée seconde est une constante, soit $u'' = a$. Dans ce cas, leur dérivée première s'écrit nécessairement $u' = aW + b$ et donc elles-mêmes s'écrivent $u = \frac{a}{2}W^2 + bW + c$, ce qui est la définition des fonctions quadratiques.

c) Si toutes les caractéristiques de la richesse dépendent exclusivement de son espérance et de sa variance, alors, quelles qu'elles soient, les préférences ne tiendront compte que de l'espérance et de la variance. Ce sera le cas si la richesse suit une loi normale.

Exercice 8.4

a) $\omega + Y$ s'obtient en transférant le poids de la valeur possible 20 de $\omega + X$, poids de 0,8, à raison de 3 huitièmes sur la valeur possible 1, qui avait un poids nul et acquiert donc un poids de 0,3, et pour le reste du poids, soit 0,5, sur la valeur, 31,4, qui avait également un poids nul et cette modification ne modifie pas l'espérance : $E(\omega + Y) = E(\omega + X)$.

b)

$$\varepsilon\big|_{\omega+X=20} = \begin{cases} -19 & 11,4 \\ 3/8 & 5/8 \end{cases}$$

c) On déplace du poids des valeurs extrêmes vers la valeur intermédiaire, sans changer l'espérance mathématique, par exemple :

$$\omega + Z = \begin{cases} 10 & 20 & 30 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 \end{cases}$$

Exercice 8.5

a)

$$W' = \begin{cases} w_1 & w_2 + x_1 & w_2 + x_2 & w_3 & w_4 + x'_1 & w_4 + x'_2 & w_4 + x'_3 \\ p_1 & p_2\pi_1 & p_2\pi_2 & p_3 & p_4\pi'_1 & p_4\pi'_2 & p_4\pi'_3 \end{cases}$$

b)

$$E\left(u(W)\right) = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) + p_3 u(w_3) + p_4 u(w_4)$$

$$E\left(u(W')\right) = p_1 u(w_1) + p_2\left[\pi_1 u(w_2 + x_1) + \pi_2 u(w_2 + x_2)\right] + p_3 u(w_3) + p_4\left[\pi'_1 u(w_4 + x'_1) + \pi'_2 u(w_4 + x'_2) + \pi'_3 u(w_4 + x'_3)\right]$$

c)

$$u(w_2) > \pi_1 u(w_2 + x_1) + \pi_2 u(w_2 + x_2)$$

$$u(w_4) > \left[\pi'_1 u(w_4 + x'_1) + \pi'_2 u(w_4 + x'_2) + \pi'_3 u(w_4 + x'_3)\right]$$

Donc $E\left(u(W)\right) > E\left(u(W')\right)$.

Exercice 8.6

Pour passer de W à W', il faut faire disparaître la plus petite valeur possible, 0, pour obtenir un 1 par l'ajout d'une variable $\varepsilon\big|_{W=0} = \begin{cases} -x & +1 \\ p & (1-p) \end{cases}$ d'espérance nulle. Un tel bruit blanc fera nécessairement apparaître une nouvelle valeur possible négative x. De même, pour passer de W' à W, il faut faire disparaître la plus grande valeur possible, 9, pour obtenir 4 par l'ajout d'une variable $\varepsilon\big|_{W'=9} = \begin{cases} -5 & +x \\ p & (1-p) \end{cases}$ d'espérance nulle. Un tel bruit blanc fera nécessairement apparaître une nouvelle valeur possible positive $x > 9$.

Exercice 8.7

a)

$$W' = \begin{cases} 1 & 10 & 20 & x & 30 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{cases} \qquad E(W') = 15,2 + 0,1x$$

Pour que $E(W') = E(W)$, il faut que $15,2 + 0,1x = 21$, soit $x = 58$.

$$W' = \begin{cases} 1 & 10 & 20 & 30 & 58 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{cases} \qquad E(W') = 21$$

b)

$$W' = W + \varepsilon\big|_{X=20} \text{ où } \varepsilon\big|_{X=20} = \begin{cases} -19 & 0 & +38 \\ 2/7 & 4/7 & 1/7 \end{cases}$$

Exercice 8.8

a)

$$f(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ k = \dfrac{1}{10} & 0 < w < 10 \\ 0 & w > 10 \end{cases}. \qquad E(W) = \int_0^{10} kw\,dw = \frac{1}{10}\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^{10} = 5.$$

b) Le poids de l'intervalle $[5;8]$ dans la densité de W est $\int_5^8 0,1\,dw = 0,3$. Une densité de probabilité ne peut pas être négative. Donc $\alpha \le 0,3$

c) Non. La densité de probabilité de W' est une fonction en escaliers (qu'on va calculer).

d)

$$\int_5^8 k_\alpha\,dw = \int_5^8 k\,dw - \alpha$$
$$\left[k_\alpha w\right]_5^8 = \int_5^8 k\,dw - \alpha$$
$$3k_\alpha = \int_5^8 k\,dw - \alpha$$
$$k_\alpha = \frac{\int_5^8 k\,dw - \alpha}{3} = \frac{\int_5^8 0,1\,dw - 0,2}{3} = \frac{1}{30}$$

e)

$$\int_1^2 k_\beta\,dw = \int_1^2 k\,dw + \beta \qquad k_\beta = k + \beta$$
$$\int_9^{11} k_\gamma\,dw = \int_9^{10} k\,dw + \gamma \qquad k_\gamma = \frac{k+\gamma}{2}$$

f)

$$\int_0^{11} g(w)\,dw = \int_0^1 k\,dw + \int_1^2 k_\beta\,dw + \int_2^5 k\,dw + \int_5^8 k_a\,dw + \int_8^9 k\,dw + \int_9^{11} k_\gamma\,dw$$
$$= \int_0^1 k\,dw + \int_1^2 (k+\beta)\,dw + \int_2^5 k\,dw + \int_5^8 \left(k - \frac{\alpha}{3}\right)dw + \int_8^9 k\,dw + \int_9^{11} \left(\frac{k}{2}\right)dw + \int_9^{11} \left(\frac{\gamma}{2}\right)dw$$
$$= \int_0^9 k\,dw + \int_1^2 \beta\,dw - \int_5^8 \frac{\alpha}{3}\,dw + k + \gamma$$
$$= 1 + \beta - \alpha + \gamma = 1$$

g) De

$$\begin{cases} k_\beta = k + \beta \\ k_\gamma = \dfrac{k+\gamma}{2} \end{cases}$$

on tire $k_\beta + 2k_\gamma = 2k + \alpha = 0,4$.

h)

$$\int_0^1 kwdw + \int_1^2 k_\beta wdw + \int_2^5 kwdw + \int_5^8 k_a wdw + \int_8^9 kwdw + \int_9^{11} wk_\gamma dw = \int_0^{10} kwdw$$

$$k\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^1 + k_\beta\left[\frac{w^2}{2}\right]_1^2 + k\left[\frac{w^2}{2}\right]_2^5 + k_\alpha\left[\frac{w^2}{2}\right]_5^8 + k\left[\frac{w^2}{2}\right]_8^9 + k_\gamma\left[\frac{w^2}{2}\right]_9^{11} =$$

$$k\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^1 + k\left[\frac{w^2}{2}\right]_1^2 + k\left[\frac{w^2}{2}\right]_2^5 + k\left[\frac{w^2}{2}\right]_5^8 + k\left[\frac{w^2}{2}\right]_8^9 + k\left[\frac{w^2}{2}\right]_9^{10}$$

$$k_\beta\left[w^2\right]_1^2 + k_\alpha\left[w^2\right]_5^8 + k_\gamma\left[w^2\right]_9^{11} = k\left[w^2\right]_1^2 + k\left[w^2\right]_5^8 + k\left[w^2\right]_9^{10}$$

$$3k_\beta + \frac{1}{30}39 + 40k_\gamma = 0,1(3+39+19) = 6,1$$

$$3k_\beta + 40k_\gamma = 4,8$$

i) La solution du système de ces deux équations

$$\begin{cases} k_\beta + 2k_\gamma = 0,4 \\ 3k_\beta + 40k_\gamma = 4,8 \end{cases}$$

est $k_\beta = \dfrac{16}{85} \simeq 0,188$ et $k_\gamma = \dfrac{9}{85} \simeq 0,106$.

j) La fonction $g(w)$ s'écrit donc :

$$g(w) = \begin{cases} 0 & w < 0 \\ \dfrac{1}{10} & 0 \le w < 1 \\ \dfrac{16}{85} & 1 \le w < 2 \\ \dfrac{1}{10} & 2 \le w < 5 \\ \dfrac{1}{30} & 5 \le w < 8 \\ \dfrac{1}{10} & 8 \le w < 9 \\ \dfrac{9}{85} & 9 \le w < 11 \\ 0 & w \ge 11 \end{cases}$$

On vérifie

$$\int_0^{11} g(w)dw = 1\times\frac{1}{10} + 1\times\frac{16}{85} + 3\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{30} + 1\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{9}{85} = 1$$

et

$$E(W') = \int_0^1 kwdw + \int_1^2 k_\beta wdw + \int_2^5 kwdw + \int_5^8 k_a wdw + \int_8^9 kwdw + \int_9^{11} wk_\gamma dw$$
$$= \frac{1}{10}\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^1 + \frac{16}{85}\left[\frac{w^2}{2}\right]_1^2 + \frac{1}{10}\left[\frac{w^2}{2}\right]_2^5 + \frac{1}{30}\left[\frac{w^2}{2}\right]_5^8 + \frac{1}{10}\left[\frac{w^2}{2}\right]_8^9 + \frac{9}{85}\left[\frac{w^2}{2}\right]_9^{11}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\times 1 + \frac{16}{85}\times 3 + \frac{1}{10}\times 21 + \frac{1}{30}\times 39 + \frac{1}{10}\times 17 + \frac{9}{85}\times 40\right) = 5$$

k)

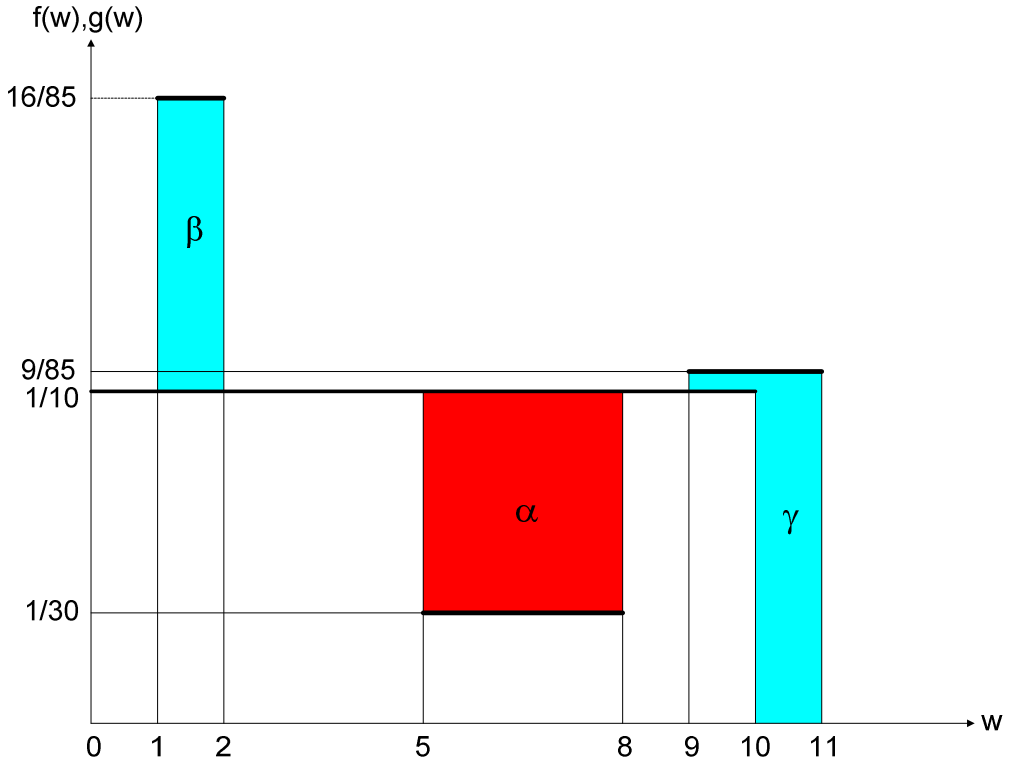

Figure E8.8 – Les deux fonctions $f(w)$ et $g(w)$.