Chapitre 6
Richesse et aversion pour le risque

Exercice 6.1

a) Le programme

$$\max_l \frac{\pi}{p} = l^\alpha - wl$$

a pour condition du premier ordre $\alpha l^{\alpha-1} - w = 0$. La condition du second ordre $\alpha(\alpha-1)l^{\alpha-2} < 0$ est satisfaite pour toute valeur positive de l. De la condition du premier ordre, on tire le résultat annoncé.

b) Si $l^d \geq n$, $p = 1$. Si $l^d < n$, $p = \frac{l^d}{n} = \frac{\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{n} < 1$.

c)

$$W = \begin{cases} w & c \\ p & 1-p \end{cases}$$

$$E(u(W)) = \frac{\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{n} u(w) + \left(1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{n}\right) u(c)$$

d)

$$E(u(W)) = \frac{l^d(w)}{n} u(w) + \left(1 - \frac{l^d(w)}{n}\right) u(c) = \frac{l^d(w)}{n}\left[u(w) - u(c)\right] + u(c)$$

Il est équivalent de maximiser, par rapport à w, la même expression moins la constante $u(c)$, multipliée par la constante positive n, soit la transformation croissante

$$l^d(w)\left[u(w) - u(c)\right]$$

e) $\frac{dl^d(w*)}{dw}\left[u(w*) - u(c)\right] + l^d(w*)u'(w*) = 0$

f) $\frac{dl^d(w*)}{dw} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{w*}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\left(-\frac{\alpha}{w*^2}\right) = -\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{w*}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{1}{w*}\right) = -\frac{1}{1-\alpha}\frac{l^d(w*)}{w*}$

g)

$$\frac{dl^d(w*)}{dw}\left[u(w*) - u(c)\right] + l^d(w*)u'(w*) = 0$$

$$-\frac{1}{1-\alpha}\frac{l^d(w*)}{w*}\left[u(w*) - u(c)\right] + l^d(w*)u'(w*) = 0$$

$$u'(w*) - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{w*}\left[u(w*) - u(c)\right] = 0$$

h) u n'est définie que si $\gamma \neq 1$. Mais il n'y a aucune autre restriction à faire puisque $u'(x) = x^{-\gamma} > 0$.

i) $u''(x) = -\gamma x^{-\gamma-1}$ est négatif si et seulement si $\gamma > 0$.

j)

$$A_a = -\frac{-\gamma x^{-\gamma-1}}{x^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{x} \qquad A_r = \gamma$$

$$\frac{dA_a}{dx} = -\frac{\gamma}{x^2} < 0 \qquad \frac{dA_r}{dx} = 0$$

k)

$$u'(w*) - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{w*}\left[u(w*) - u(c)\right] = 0$$

$$w*^{-\gamma} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{w*}\left[\frac{w*^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = 0$$

$$w*^{-\gamma}\left(1 - \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{1}{(1-\gamma)}\left[1 - \left(\frac{c}{w*}\right)^{1-\gamma}\right]\right) = 0$$

$$1 - \left(\frac{c}{w*}\right)^{1-\gamma} = (1-\alpha)(1-\gamma)$$

$$w* = \frac{c}{\left[1-(1-\alpha)(1-\gamma)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}}$$

l) $l^d = \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha\left[1-(1-\alpha)(1-\gamma)\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}}{c}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Le taux de salaire optimal $w*$ est proportionnel à l'indemnité de chômage. La demande de travail est une fonction décroissante du taux de salaire. Donc plus l'indemnité de chômage est élevée, plus la demande de travail est faible, plus est grand est le risque d'être au chômage qu'acceptent les salariés. Ainsi, si les salariés étaient entièrement libres de fixer les salaires, ils accepteraient un certain taux de chômage.

Exercice 6.2

a) La fonction $E(v(W))$ représente les mêmes préférences que la fonction $E(u(W))$ si $v = au + b$, $a > 0$. Donc $v'' = au''$. Les deux dérivées ont le même signe, mais pas la même valeur absolue si $a \neq 1$.

b) $-\frac{v''}{v'} = -\frac{au''}{au'} = -\frac{u''}{u'}$.

Exercice 6.3

a) Si $y = u(w)$ et $z = v(w)$, alors $w = v^{-1}(z)$. Donc $y = u(v^{-1}(z)) = u(v^{-1}(v(w))) = f(v(w))$, ce qui établit l'existence de la fonction $f = u(v^{-1})$. Reste à démontrer que f est croissante : $f' = u'(v^{-1})' = \frac{u'}{v'} > 0$.

b) $f\left(x\right)=u\left(v^{-1}\left(x\right)\right)=\ln\left(x^2\right)$. On vérifie que f est concave : $\frac{d\ln x^2}{dx}=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$. Donc $\frac{d^2\ln x^2}{dx^2}=-\frac{2}{x^2}<0$.

c)

$$u\left(w\right)=f\left(v\left(w\right)\right)$$

$$u'\left(w\right)=f'\left(v\right)v'\left(w\right)$$

$$u''\left(w\right)=f''\left(v\right)\left[v'\left(w\right)\right]^2+f'\left(v\right)v''\left(w\right)$$

$$\frac{u''\left(w\right)}{u'\left(w\right)}=\frac{f''\left(v\right)\left[v'\left(w\right)\right]^2}{f'\left(v\right)v'\left(w\right)}+\frac{f'\left(v\right)v''\left(w\right)}{f'\left(v\right)v'\left(w\right)}$$

$$\frac{u''\left(w\right)}{u'\left(w\right)}=\frac{f''\left(v\right)v'\left(w\right)}{f'\left(v\right)}+\frac{v''\left(w\right)}{v'\left(w\right)}$$

$$\frac{f''\left(v\right)v'\left(w\right)}{f'\left(v\right)}=\frac{u''\left(w\right)}{u'\left(w\right)}-\frac{v''\left(w\right)}{v'\left(w\right)}<0$$

$$\frac{u''\left(w\right)}{u'\left(w\right)}<\frac{v''\left(w\right)}{v'\left(w\right)}$$

$$-\frac{u''\left(w\right)}{u'\left(w\right)}>-\frac{v''\left(w\right)}{v'\left(w\right)}$$