Chapitre 2
Les préférences en univers incertain

Exercice 2.1

a) Le programme

$$\begin{cases} \max s = q_1 q_2 \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 \leq \omega \end{cases}$$

a pour solution $q_1^d = \dfrac{\omega}{2p_1}$ et $q_2^d = \dfrac{\omega}{2p_2}$. L'utilité maximale atteignable avec la richesse ω et les prix p_1 et p_2 est donc

$$v(p_1, p_2, \omega) = \left(\frac{\omega}{2p_1}\right)\left(\frac{\omega}{2p_2}\right) = \frac{\omega^2}{4p_1 p_2}$$

b) Toute transformation strictement croissante $g(v)$.

c) Il est inutilement lourd de garder le 4 du dénominateur. La transformation $g(v) = 4v$ s'impose.

d) En France, il aura une utilité $\dfrac{10^2}{1\times 2} = 50$. A l'étranger, $\dfrac{18^2}{2\times 3} = 54$. Donc il s'expatriera.

Exercice 2.2

a)

$$U(\omega + X) = \sqrt{\frac{1}{6}\times 10\,500} + \sqrt{\frac{5}{6}\times 9\,900} = 132,7$$
$$U(\omega + Y) = \sqrt{1\times 10\,000} = 100$$

M. Dupont joue.

b)

$$U(\omega + X) = \frac{1}{6}\sqrt{10\,500} + \frac{5}{6}\sqrt{9\,900} = 99,99$$
$$U(\omega + Y) = \sqrt{1\times 10\,000} = 100$$

M. Dupont ne joue pas.

c)

$$U(\omega + X) = \frac{1}{6}\times 10\,500 + \frac{5}{6}\times 9\,900 = 10\,000$$
$$U(\omega + Y) = 1\times 10\,000 = 10\,000$$

M. Dupont est indifférent entre jouer et ne pas jouer. Sans hypothèse supplémentaire, on ne peut pas dire ce qu'il fera.

d)

$$U(\omega + X) = 10\,500 = 10\,500$$
$$U(\omega + Y) = 10\,000 = 10\,000$$

M. Dupont joue.

Exercice 2.3

a) $\dfrac{\partial i^*}{\partial l} = 1 > 0$

b)

$$\frac{\partial i^*}{\partial p} = -\left[\frac{(-1)2kp(1-p)-(\beta-p)2k\left[(1-p)+p(-1)\right]}{\left[2kp(1-p)\right]^2}\right]$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\frac{\partial i^*}{\partial p} &= \operatorname{sgn}\left[-\left(-2kp(1-p)-(\beta-p)2k(1-2p)\right)\right]\\
&= \operatorname{sgn} 2k\left[p(1-p)+(\beta-p)(1-2p)\right]\\
&= \operatorname{sgn}\left[p-p^2+\beta(1-2p)-p(1-2p)\right]\\
&= \operatorname{sgn}\left[p-p^2+\beta-2\beta p-p+2p^2\right]\\
&= \operatorname{sgn}\left[p^2-2\beta p+\beta\right]
\end{aligned}$$

Or l'équation du second degré $p^2-2\beta p+\beta$ a un discriminant $\Delta = 4\beta^2-4\beta = 4\beta(\beta-1)$ toujours négatif. La dérivée ne passe donc pas par 0. Elle est donc toujours de même signe. Or elle est positive, par exemple, pour $p = 0,01$ et $\beta = 0,02$. Donc elle est toujours positive.

$$\lim_{p\to\beta} i^* = l - \frac{\lim_{p\to\beta}(\beta-p)}{2kp(1-p)} = l\,.$$

$$\lim_{p\to 0} i^* = l - \frac{\beta}{2k\lim_{p\to 0} p(1-p)} + \lim_{p\to 0}\frac{p}{2kp(1-p)} = l - \frac{\beta}{2k[0]} + \lim_{p\to 0}\frac{1}{2k(1-p)} = l-\infty+\frac{1}{2k} = -\infty$$

La fonction i^*, si on ne lui impose pas la borne $0 \le i^*$, croît continument de $-\infty$ à l. Elle passe donc par 0 une seule fois. $p^{\min}$ est l'unique solution inférieure à β de l'équation :

$$\frac{\beta-p^{\min}}{2kp^{\min}\left(1-p^{\min}\right)} = l \qquad \Leftrightarrow \qquad 2kl\left(p^{\min}\right)^2-(1+2kl)\,p^{\min}+\beta = 0$$

Le discriminant $\Delta = (1+2kl)^2-8kl\beta$ est positif. En effet, $8kl\beta < 8kl$. Donc $\Delta > (1+2kl)^2-8kl = (1-2kl)^2 > 0$. L'équation a deux solutions positives, mais le maximum de la fonction étant atteint pour une valeur positive, seule la plus petite nous intéresse, $p^{\min} = \dfrac{1+2kl-\sqrt{\Delta}}{4kl}$.

c) $\beta^{\max}$ est la valeur maximale de β qui détermine une indemnité strictement positive. Donc $\beta^{\max}$ vérifie $l - \dfrac{\beta^{\max}-p}{2kp(1-p)} \ge 0$, soit $\beta^{\max} = p\left(1+2k(1-p)l\right)$. Comme β doit être strictement inférieur à 1,

$$\beta^{\max} = \min\left\{1;\, p\left(1+2k(1-p)l\right)\right\}$$

d) $\dfrac{\partial i^*}{\partial k} = \dfrac{\beta-p}{2p(1-p)k^2} > 0$.

Exercice 2.4

a)

$$\omega + X = \begin{cases} 45 & 55 & 60 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{cases} \qquad V^*(\omega+X) = 0,9 \qquad U(\omega+X) = 57,5 - 10\times 0,9 = 48,5$$

$$\omega + Y = \begin{cases} 30 & 55 & 60 \\ 0,01 & 0,29 & 0,7 \end{cases} \qquad V^*(\omega+Y) = 3,24 \qquad U(\omega+Y) = 58,25 - 10\times 3,24 = 25,85$$

Il choisira l'action X .

b)

$$\begin{aligned} U(\omega+X) &= \omega + E(X) - k\sum_{w_i\le\omega} p_i (w_i-\omega)^2 \\ &= \omega + E(X) - k\sum_{w_i\le\omega} p_i (\omega + x_i-\omega)^2 \\ &= \omega + E(X) - k\sum_{w_i\le\omega} p_i x_i^2 \end{aligned}$$

De même,

$$U(\omega+Y) = \omega + E(Y) - k\sum_{w_i\le\omega} p_i y_i^2$$

Donc si $E(X) - k\sum_{w_i\le\omega} p_i x_i^2 > E(Y) - k\sum_{w_i\le\omega} p_i y_i^2$, il préfèrera l'action X quelle que soit sa richesse ω.

c) Même démonstration avec $V(X)$ et $V(Y)$ à la place de $V^*(X)$ et $V^*(Y)$.

Exercice 2.5

Les deux fonctions représentent les mêmes préférences. Donc aucune n'est plus générale que l'autre pour une analyse économique.

Exercice 2.6

a) $(40;10) \succ (30;15)$.

b) $f(40,10) = 40\times 10 = 400 < f(30,15) = 30\times 15 = 450$. Donc la fonction f ne peut pas représenter la préférence du a).

c) $g(40,10) = 16\,000 > g(30,15) = 13\,500$. Donc la fonction g peut représenter la préférence du a).