Chapitre 10
La demande d'assurance

Exercice 10.1

a) M. Dupont emploie le mot *risque* dans son acception courante de *danger* ou *inconvénient* éventuel. En termes techniques,

– « Ma maison risque d'être inondée » se traduit donc : « le taux de sinistralité peut prendre une valeur non nulle ».

– « Suivant le niveau que l'eau atteint, le dommage varie de 0 à 100% de sa valeur l. Tous ces pourcentages sont équiprobables » se traduit: « Le taux de sinistralité suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$ et s'écrit donc $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(0;1)$ ».

Quant au risque de la richesse, il provient du fait que celle-ci est aléatoire. S'il peut être mesuré par la variance, il est égal à $l^2V(X)$.

b) Puisque sa richesse finale ne suit pas une loi normale, la seule possibilité pour que la variance soit une bonne mesure du risque qu'il perçoit est que la dérivée troisième u''' soit identiquement nulle, donc que u soit quadratique.

c) Par définition, la densité de probabilité $f(x)$ d'une variable aléatoire X continue sur l'intervalle $[a;b]$ est une fonction telle que $\int_a^b f(x)dx = 1$. Ici, l'intervalle est $[0;1]$ et $f(x) = k$. Donc

$$\int_0^1 kdx = 1$$

$$[kx]_0^1 = 1$$

$$k = 1$$

La représentation graphique est celle de la figure E10.1.1 :

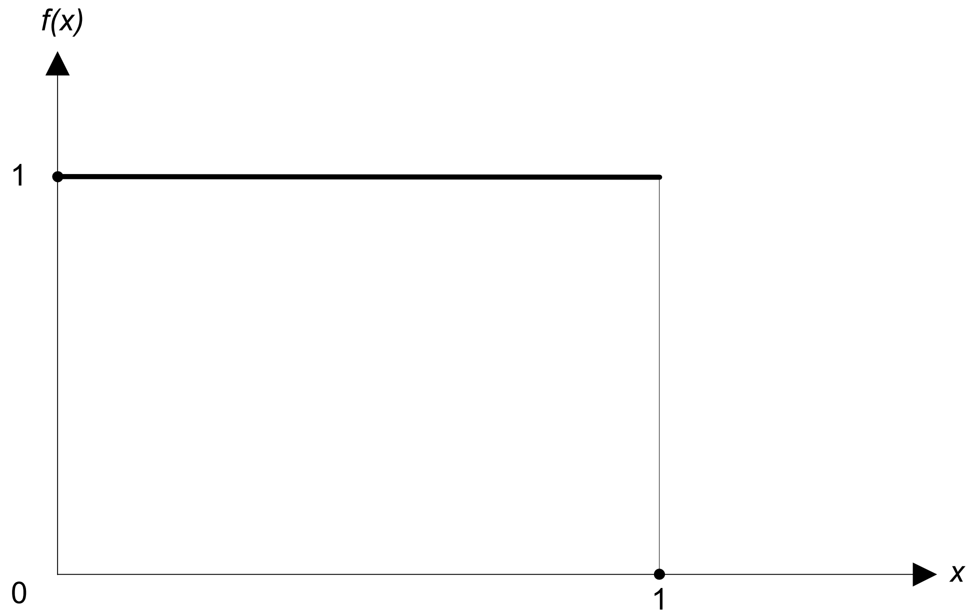

Figure E10.1.1 – La densité de probabilité d'un taux de sinistralité uniforme.

L'espérance et la variance du taux de sinistralité sont:

$$E(X) = \int_0^1 kxdx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$V(X)=\int_0^1 k\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

La variance de la richesse est

$$V(W)=V(\omega+l(1-X))=(-l)^2V(X)=\frac{l^2}{12}$$

d) Si la densité de probabilité est une fonction affine, elle s'écrit $g(x')=ax'+b$.

« Je suis sûr d'être inondé » se traduit par « la probabilité que le taux de sinistralité prenne une valeur qui tend vers 0 tend vers 0 », soit $g(0)=0$, donc $b=0$. Au total

$$\int_0^1 ax'dx=1$$

$$a\left[\frac{x'^2}{2}\right]_0^1=1$$

$$a=2$$

et $g(x')=2x'$, ce qui est représenté sur la figure E10.1.2.

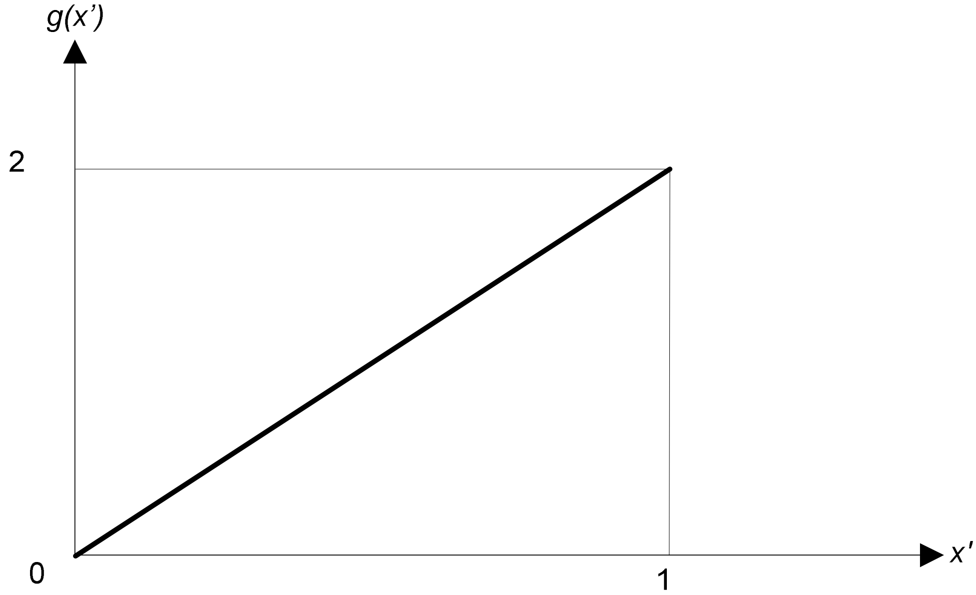

Figure E10.1.2 – La densité de probabilité du taux de sinistralité modifié.

$$E(X')=\int_0^1(2x')x'dx=2\int_0^1 x'^2 dx=2\left[\frac{x'^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$V(X')=\int_0^1 2x'\left(x'-\frac{2}{3}\right)^2 dx=2\int_0^1\left(x'^3-\frac{4x'^2}{3}+\frac{4x'}{9}\right)dx=2\left[\frac{x'^4}{4}-\frac{4x'^3}{9}+\frac{4x'^2}{18}\right]_0^1=\frac{1}{18}$$

$$V(W')=V(\omega+l(1-X'))=(-l)^2V(X')=\frac{l^2}{18}$$

e) Puisqu'on a admis que la variance était une mesure correcte du risque perçu, la richesse W' est moins risquée que la richesse W.

f) On ne peut pas dire que le taux de sinistralité a augmenté, parce qu'on ne peut pas dire qu'une variable aléatoire est plus grande qu'une autre. Dans le meilleur des cas, on peut dire si le taux de sinistralité X' domine stochastiquement le taux de sinistralité X à l'ordre 1 (et non pas à l'ordre 2!).

g) Notons les fonctions de répartition de X et X' respectivement :

$$F(t)=\Pr\{X<t\}=\int_{-\infty}^{t}kdx=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0\\ t & \text{si} \quad 0\le t\le 1\\ 1 & \text{si} \quad t>1\end{cases}$$

$$G(t)=\Pr\{X'<t\}=\int_{-\infty}^{t}2xdx=\begin{cases}0 & \text{si} \quad t<0\\ t^2 & \text{si} \quad 0\le t\le 1\\ 1 & \text{si} \quad t>1\end{cases}$$

Elles sont confondues pour tout t négatif et pour tout t supérieur à 1. Entre 0 et 1, $t^2<t$. Donc, quel que soit t, $G(t)\le F(t)$, et il existe un intervalle de probabilité non nulle sur lequel l'inégalité est stricte. X' domine donc stochastiquement X à l'ordre 1. En termes littéraires, toutes les personnes dont les préférences respectent l'hypothèse de non satiété considèrent que la sinistralité X' est plus importante que la sinistralité X.

h) Si X' domine X, alors lX' domine lX, $-lX$ domine $-lX'$, $(\omega+l)-lX=W$ domine $(\omega+l)-lX'=W'$.

i) Si W domine W' à l'ordre 1, elle la domine nécessairement à l'ordre 2, puisque les riscophobes sont un sous-ensemble des individus dont les préférences respectent l'hypothèse de non satiété.

Exercice 10.2

L'antisélection est le fait que ce sont les personnes qui ont la plus grande probabilité de se faire cambrioler qui sont les plus attirées par la souscription de cette assurance. Le risque moral est l'accroissement de sinistralité que crée la diminution des précautions que prend un assuré.

Exercice 10.3

a) On ne peut pas comparer toutes les richesses. Mais, dans certain cas, tous les agents dont les préférences respectent l'hypothèse de non satiété, donc tous les agents qui préfèrent une grande richesse certaine à une petite richesse certaine, préfèrent la richesse aléatoire W à la richesse aléatoire W'. On dit alors que W domine stochastiquement W' à l'ordre 1.

b)

$$W=\omega+l(1-X)+alX-(1+\lambda)aE(lX)$$
$$W'=\omega+l(1-X)+alX-(1+\lambda+\Delta\lambda)aE(lX)$$

W est obtenue à partir de W' par un déplacement uniforme à droite de $aE(lX)\Delta\lambda>0$. Donc W domine stochastiquement W' à l'ordre 1.

Exercice 10.4

a)

$$\pi_m(1)=\frac{d\pi}{da}(1)=\frac{\partial E(W)}{\partial a}-\frac{E\left(u'(W)\dfrac{\partial W}{\partial a}\right)}{u'(E(W)-\pi)}$$
$$=\left[-\lambda lE(X)\right]-\frac{u'(\omega+l-(1+\lambda)lE(X))E(lX-(1+\lambda)lE(X))}{u'(\omega+l-(1+\lambda)lE(X)-0)}$$
$$=\left[-\lambda lE(X)\right]-lE(X)+(1+\lambda)lE(X)=0$$

b) La condition du premier ordre s'écrit $E\left(u'\left(W\left(a^*\right)\right)\dfrac{dW}{da}\left(a^*\right)\right)=0$. En remplaçant dans l'expression de $\pi_m\left(a\right)$, on obtient le résultat.

c) Si $a=1$, la richesse est une grandeur certaine, et donc $u'\left(W\left(1\right)\right)=u'\left(\omega+l-\left(1+\lambda\right)lE\left(X\right)\right)$ est également une grandeur certaine. Or, la covariance entre une grandeur certaine et une variable aléatoire est nulle. Donc :

$$c_m\left(1\right)=-\frac{COV\left(u'\left(W\left(1\right)\right),Y\right)}{E\left(u'\left(W\left(1\right)\right)\right)}=0$$

Exercice 10.5

a) De

$$\max\left\{0,lX-d\right\} \text{ ou } I=\begin{cases}0 & \text{si } X<\dfrac{d}{l}\\ lX-d & \text{si } X\geq\dfrac{d}{l}\end{cases}$$

on tire que l'espérance mathématique de I a pour expression :

$$E\left(I\right)=\Pr\left\{X<\frac{d}{l}\right\}\times 0+\int_{\frac{d}{l}}^{1}\left(lx-d\right)f\left(x\right)dx$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{d}{l}}^{1}\left(lx-d\right)f\left(x\right)dx&=\int_{\frac{d}{l}}^{1}uv'dx=\left[uv\right]_{\frac{d}{l}}^{1}-\int_{\frac{d}{l}}^{1}u'vdx\\&=\left[\left(xl-d\right)F\left(x\right)\right]_{\frac{d}{l}}^{1}-\int_{\frac{d}{l}}^{1}lF\left(x\right)dx\\&=\left[\left(l-d\right)F\left(1\right)-\left(\frac{d}{l}l-d\right)F\left(\frac{d}{l}\right)\right]-l\int_{\frac{d}{l}}^{1}F\left(x\right)dx\end{aligned}$$

$$E\left(I\right)=\left(l-d\right)-l\int_{\frac{d}{l}}^{1}F\left(x\right)dx$$

c)

$$b=\left(1+\lambda\right)\left[\left(l-d\right)-l\int_{\frac{d}{l}}^{1}F\left(x\right)dx\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial d}&=\left(1+\lambda\right)\left[-1-l\left(-F\left(\frac{d}{l}\right)\frac{1}{l}\right)\right]\\&=-\left(1+\lambda\right)\left[1-F\left(\frac{d}{l}\right)\right]<0\end{aligned}$$

Exercice 10.6

Calculez la dérivée. Vérifiez qu'elle ne passe pas par 0 et qu'elle est négative en $p=1$. Donc elle est toujours négative.