Annexe 7.- Dominance stochastique dans la demande d'assurance

Comme pour la théorie du portefeuille (Annexe 5), nous construisons les fonctions de répartition des différentes richesses possibles à partir de celle $F(t)$ de X. Tout ce qui suit est fait sous l'hypothèse $(1+\lambda)E(X) < 1$ (On a vu, à la section 10.2, que si cette condition n'est pas réalisée, la richesse obtenue avec $a = 0$ domine stochastiquement toutes les autres à l'ordre 1).

La fonction de répartition $G(t)$ de la richesse finale $W(\alpha)$ obtenue en choisissant $a = \alpha \neq 1$ s'écrit

$$\begin{aligned} G(t) &= \Pr\{W(\alpha) < t\} = \Pr\{\omega + l(1-X) + \alpha l X - (1+\lambda)\alpha l E(X) < t\} \\ &= \Pr\left\{X > \frac{\omega + l(1-(1+\lambda)\alpha E(X)) - t}{(1-\alpha)l}\right\} \\ &= 1 - F\left(\frac{\omega + l(1-(1+\lambda)\alpha E(X)) - t}{(1-\alpha)l}\right) \end{aligned}$$

De même, la fonction de répartition $H(t)$ de la richesse finale $W(\beta)$ obtenue en choisissant $a = \beta \neq 1$ s'écrit

$$H(t) = 1 - F\left(\frac{\omega + l(1-(1+\lambda)\beta E(X)) - t}{(1-\beta)l}\right)$$

La courbe de $G(t)$ sera sous celle de $H(t)$ pour toutes les valeurs de t telles que

$$1 - F\left(\frac{\omega + l(1-(1+\lambda)\alpha E(X)) - t}{(1-\alpha)l}\right) < 1 - F\left(\frac{\omega + l(1-(1+\lambda)\beta E(X)) - t}{(1-\beta)l}\right)$$

soit, tous calculs faits,

$$(\beta - \alpha)[\omega + l[1-(1+\lambda)E(X)] - t] < 0$$

Notons $\overline{w} = \omega + l[1-(1+\lambda)E(X)]$. Alors, la courbe de $G(t)$ sera sous celle de $H(t)$ si et seulement si

$$(\beta - \alpha)[\overline{w} - t] < 0$$

c'est-à-dire, si $\beta > \alpha$, pour toute valeur de t supérieure à $\overline{w}$. Elle sera au-dessus pour toute valeur de t inférieure à $\overline{w}$. Toutes les courbes, pour $a \neq 1$, se croisent donc en un point d'abscisse $\overline{w}$.

Reste à déterminer la fonction de répartition de la richesse obtenue avec $a = 1$.

$$W(1) = \omega + l(1-X) + lX - (1+\lambda)lE(X) = \overline{w}$$

Sa fonction de répartition

$$Z(t) = \Pr\{W(1) < t\}$$

est donc confondue avec l'axe horizontal jusqu'au point d'abscisse $\overline{w}$, puis avec la droite d'ordonnée 1 au-delà:

$$\begin{aligned} Z(t) &= 0 \quad \text{si} \quad t \leq \overline{w} \\ Z(t) &= 1 \quad \text{si} \quad t > \overline{w} \end{aligned}$$

Elle coupe donc, par un saut, toutes les autres courbes de répartition, à la même abscisse.

Toutes les courbes se croisent donc. **Aucune richesse finale ne domine stochastiquement les autres à l'ordre 1**. C'est ce qu'illustre la figure A5.

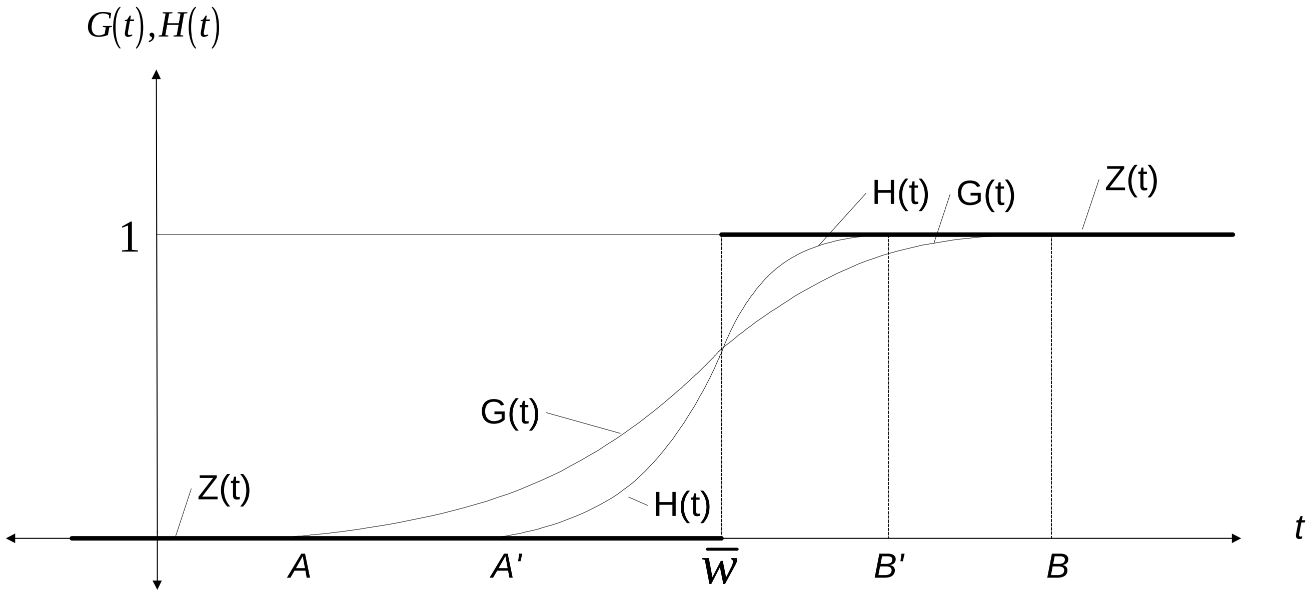

Figure A.5 – Les fonctions de répartition se croisent toutes en un point d'abscisse $\overline{w}$.