Annexe 5.- Dominance stochastique dans les choix de portefeuille

Pour déterminer s'il existe des cas de dominance stochastique, il faut d'abord écrire la fonction de répartition de la richesse finale.

1.– La fonction de répartition de la richesse finale

La fonction de répartition $G(t)$ de la richesse finale $W(\alpha)$ obtenue en choisissant $a = \alpha$ se déduit de la fonction de répartition $F(t)$ de Y de la manière suivante:

– si α est strictement positif:

$$\begin{aligned} G(t) &= \Pr\{W(\alpha) < t\} = \Pr\{\omega(1+i) + \alpha(Y-i) < t\} = \Pr\left\{Y < \frac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i\right\} \\ &= F\left(\frac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i\right) \end{aligned}$$

– si α est nul:

$$G(t) = \Pr\{W(0) < t\} = \Pr\{\omega(1+i) < t\}$$

soit

$$\begin{aligned} &\text{si } t \le \omega(1+i), \quad G(t) = 0 \\ &\text{si } t > \omega(1+i), \quad G(t) = 1 \end{aligned}$$

La fonction de répartition $G(t)$ est discontinue: confondue avec l'axe des abscisses de $-\infty$ à $\omega(1+i)$, elle saute directement à l'ordonnée 1, à laquelle elle reste jusqu'à $+\infty$.

– si α est strictement négatif:

$$\begin{aligned} G(t) &= \Pr\{W(\alpha) < t\} = \Pr\{\omega(1+i) + \alpha(Y-i) < t\} = \Pr\left\{Y > \frac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i\right\} \\ &= 1 - F\left(\frac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i\right) \end{aligned}$$

2.– Dominance d'ordre 1

Notons $H(t)$ la fonction de répartition de la richesse $W(\beta)$ obtenue en choisissant $a = \beta$. Pour la comparer à la fonction $G(t)$, il faut distinguer le cas où la variable Y est bornée, et le cas où elle ne l'est pas. Commençons par le second.

I.– Y non borné

Si Y n'est pas borné, la fonction F est *strictement* croissante en tout point, et donc G et H le sont aussi. Commençons par supposer que $0 < \alpha < \beta$. Il suffit alors de comparer

$$G(t) = F\left(\frac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i\right) \qquad \text{et} \qquad H(t) = F\left(\frac{t-\omega(1+i)}{\beta} + i\right)$$

Puisque G et H sont strictement croissantes, on a les inégalités strictes

$$\begin{aligned} G(t) &< H(t) \qquad \forall t < \omega(1+i) \\ G(t) &= H(t) \quad \text{si} \quad t = \omega(1+i) \\ G(t) &> H(t) \qquad \forall t > \omega(1+i) \end{aligned}$$

Les courbes **se croisent** donc au point d'abscisse $\omega(1+i)$ et d'ordonnée $F(i)$. Il n'y a donc pas de dominance d'ordre 1 d'une richesse $W(\alpha)$, avec un α positif sur une autre $W(\beta)$ avec un β positif.

Avec $\alpha < \beta < 0$, les courbes se croisent au point d'abscisse $\omega(1+i)$ et d'ordonnée $1 - F(i)$. Il n'y a donc pas de dominance d'ordre 1 d'une richesse $W(\alpha)$, avec un α négatif sur une autre $W(\beta)$ avec un β négatif.

Enfin, si $\alpha < 0 < \beta$, notons $Z(t)$ la fonction de répartition de la richesse $W(0)$ obtenue ne choisissant $a = 0$. Elle a une valeur inférieure à celle de $G(t)$ et celle de $H(t)$ pour $t < \omega(1+i)$ et supérieure pour $t > \omega(1+i)$. Les deux courbes $G(t)$ et $H(t)$ sont donc "coupées" par $Z(t)$. Dans ce cas non plus, il n'y a pas de dominance stochastique d'ordre 1.

Au total, quels que soient les signes de α et β, **il n'existe donc aucune richesse dominant stochastiquement les autres si Y n'est pas borné**.

Sur la figure A3, on a représenté la fonction de répartition de 5 richesses

$$W = \omega(1+i) + a(Y - i)$$

où Y suit une loi normale d'espérance 10% et d'écart-type 40% soit $Y \rightsquigarrow N(0,1;0,16)$; $\omega = 100$ et $i = 3,5\%$. Ona représenté les courbes de répartition de cinq richesses, celles pour lesquelles $a = -5, a = -2,5, a = 0, a = 2,5$ et $a = 5$.

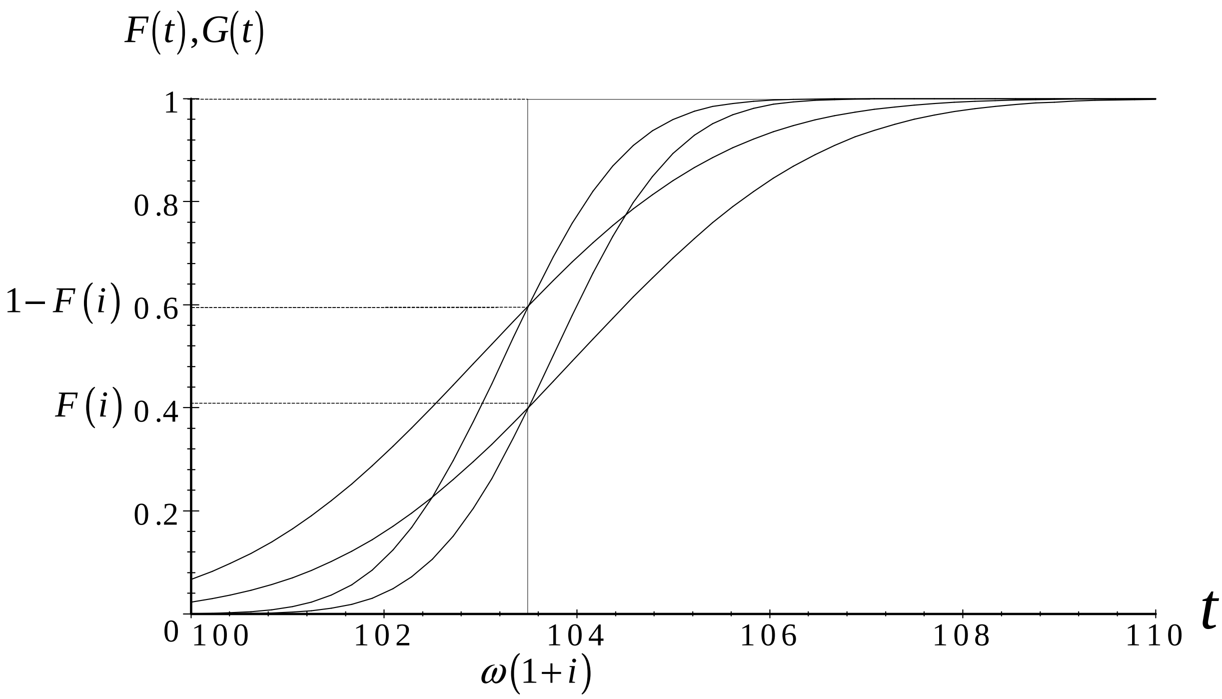

Figure A.3. – Les fonctions de répartition se croisent.

Les courbes de toutes les richesses pour lesquelles a est positif se croisent en un point d'abscisse $\omega(1+i)$ (103,5 sur la figure) et d'ordonnée $F(i)$ (un peu plus de 40% sur la figure). Les courbes de toutes les richesses pour lesquelle a est négatif se croisent en un point de même abscisse et d'ordonnée est $1 - F(i)$ (un peu moins de 60%). Enfin, la courbe $Z(t)$ de la richesse $W(0)$ est confondue avec l'axe horizontal jusqu'à la même abscisse, point où elle saute à 1, et se confond alors avec la droite horizontale d'ordonnée 1. Elle coupe donc toutes les autres.

II.– *Y* borné

Si les valeurs possibles de Y sont bornées ($y \in [y^{\min}; y^{\max}]$), alors, la fonction de répartition $F(t)$ n'est strictement croissante qu'entre $y^{\min}$ et $y^{\max}$:

$$\begin{array}{ll} \text{si } t \leq y^{\min}, & F(t) = 0 \\ \text{si } t \in [y^{\min}; y^{\max}], & 0 \leq F(t) \leq 1 \\ \text{si } t > y^{\max}, & F(t) = 1 \end{array}$$

De même, la fonction G est confondue avec l'axe horizontal de $-\infty$ à un point A, avec la droite d'ordonnée 1 à partir d'un point B. Plus précisément, si α est positif,

a) $G(t) = 0$ si $\dfrac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i < y^{\min}$, soit si $t < \omega(1+i) - \alpha(i - y^{\min}) = A$

b) $0 \leq G(t) \leq 1$ si $\dfrac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i \in [y^{\min}; y^{\max}]$, soit si $t \in [\omega(1+i) - \alpha(i - y^{\min}); \omega(1+i) + \alpha(y^{\max} - i)]$.

c) $G(t) = 1$ si $\dfrac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i > y^{\max}$, soit si $t > \omega(1+i) + \alpha(y^{\max} - i) = B$.

De même, la fonction $H(t)$ de la richesse $W(\beta)$ pour laquelle β est positif, a une valeur nulle jusqu'au point

$$A' = \omega(1+i) - \beta(i - y^{\min})$$

et égale à 1 à partir du point

$$B' = \omega(1+i) + \beta(y^{\max} - i)$$

Si $0 < \alpha < \beta$, on en déduit que

$$A - A' = (i - y^{\min})(\beta - \alpha)$$

est du même signe que $i - y^{\min}$ et

$$B - B' = (i - y^{\max})(\beta - \alpha)$$

du même signe que $i - y^{\max}$.

Si $y^{\min} < i < y^{\max}$

$$A < A' < \omega(1+i) < B' < B$$

et les courbes se croisent (au point d'abscisse $\omega(1+i)$).

Mais si $y^{\min} < y^{\max} < i$, alors

$$A' < A \text{ et } B' < B < \omega(1+i)$$

et les seules valeurs communes de G et H sont obtenues pour $t < A'$ et $t > B$ (notamment $t = \omega(1+i)$ comme auparavant). Donc les courbes ne se croisent pas, et $W(\alpha)$ domine stochastiquement $W(\beta)$.

Comparons à présent $G(t)$ et la fonction de répartition $Z(t)$ de la richesse $W(0)$:

a) si $t < A$, $Z(t) = 0 = G(t)$.

b) si $A < t < B$, $Z(t) = 0 < G(t)$.

c) si $B < t < \omega(1+i)$, $Z(t) = 0 < G(t) = 1$.

c) si $t > \omega(1+i)$, $Z(t) = 1 = G(t)$.

Au total

$$Z(t) \leq G(t)$$

avec des valeurs de t pour lesquelles l'inégalité est stricte. Donc $W(0)$ domine stochastiquement $W(\alpha)$ si α est strictement positif.

Enfin, examinons la fonction $G(t)$ de la richesse $W(\alpha)$ avec α négatif

$$G(t) = 1 - F\left(\frac{t-\omega(1+i)}{\alpha} + i\right)$$

Les mêmes calculs que précédemment déterminent les points $A' = \omega(1+i) + \alpha(y^{\max} - i) > \omega(1+i)$, puisque α et $(y^{\max} - i)$ sont négatifs tous les deux et $B' = \omega(1+i) + \alpha(y^{\min} - i)$), soit

$$\omega(1+i) < A < B$$

et, avec le même raisonnement que précédemment,

$$G(t) \leq Z(t)$$

avec des valeurs de t pour lesquelles l'inégalité est stricte. Donc $W(\alpha)$ domine stochastiquement $W(0)$ si α est strictement négatif.

Voyons enfin la fonction de répartition $H(t)$ de la richesse $W(\beta)$, dans laquelle β est un nombre négatif de plus gande valeur absolue que α. $H(t)$ devient positif à partir de $A'' > A'$, égal à 1 à partir de $B'' > B$. On vérifie que les courbes ne se croisent pas. Elles sont confondues pour $t < A'$ et $t > B''$. Par conséquent, $W(\beta)$ domine stochastiquement $W(\alpha)$.

Au total, **si** $y^{\min} < y^{\max} < i$, **toute richesse** $W(\beta)$ **domine stochastiquement les richesse** $W(\alpha)$ **telles que** $\alpha > \beta$.

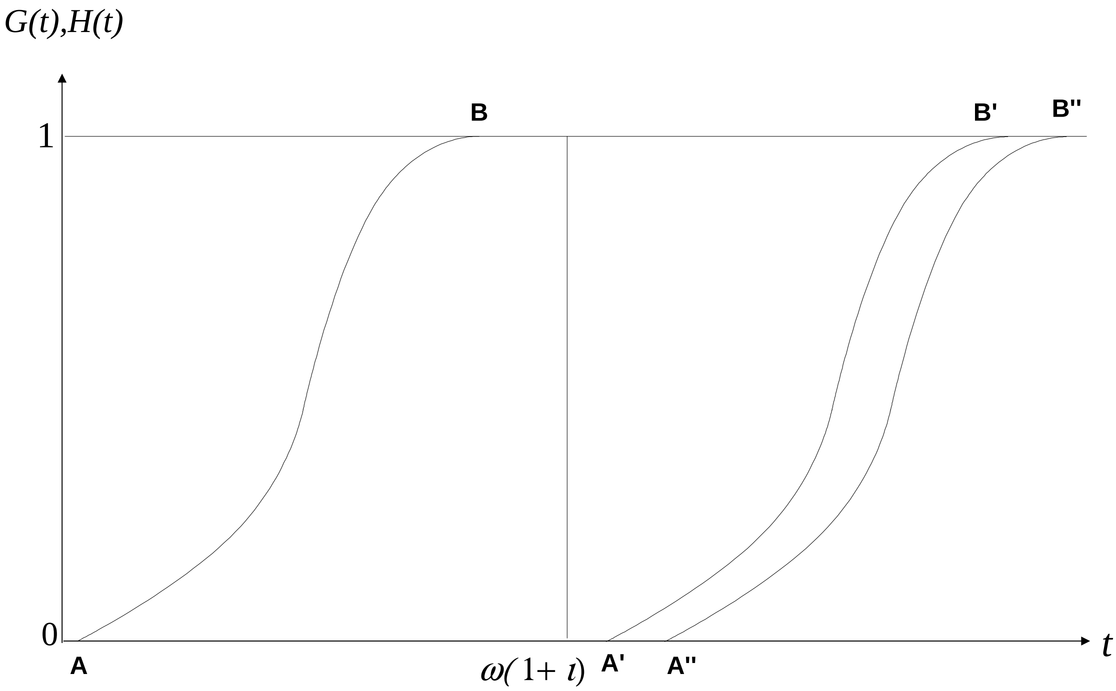

Figure A.4 – La dominance stochastique quand $y^{\min} < y^{\max} < i$.

La figure A.4 illustre le cas $y^{\min} < y^{\max} < i$. La courbe AB est la courbe de répartition d'une richesse pour laquelle a est positif. La courbe $A'B'$ est celle d'une richesse pour laquelle a est négatif et $A''B''$ celle d'une richesse pour laquelle a est également négatif, mais de plus grande valeur absolue que dans le cas précédent.

Inversement, **si** $i < y^{\min} < y^{\max}$, **toute richesse** $W(\beta)$ **domine stochastiquement les richesse** $W(\alpha)$ **telles que** $\beta > \alpha$.

3.– Dominance d'ordre 2.

La condition sur les intégrales se révèle inutilisable sans spécification de la loi de Y. On peut cependant noter que

– l'espérance de la richesse finale:

$$E(W) = E(\omega(1+i) + a(Y-i)) = \omega(1+i) + a(E(Y)-i)$$

dépend de a. Plus précisément:

$$\frac{dE(W)}{da} = E(Y) - i$$

– Quant à la variance, elle augmente avec la *valeur absolue* de a:

$$V(W) = V(\omega(1+i) + a(Y-i)) = a^2 V(Y)$$

et s'annule pour $a = 0$.

D'où nous concluons:

– Si $E(Y) \neq i$, toute variation de a augmentant l'espérance augmente également la variance.

– Si $E(Y) = i$, alors l'espérance est la même ($\omega(1+i)$) pour tous les portefeuilles. Alors toute richesse $W(a)$ avec $a \neq 0$ peut être obtenue à partir de la richesse

$$W(0) = \omega(1+i)$$

par ajout de l'aléa d'espérance nulle

$$\varepsilon \mid_{W=\omega(1+i)} = a(Y-i)$$

et donc tous les riscophobes préfèrent $a = 0$ à $a \neq 0$. Donc, **si** $E(Y) = i$, $W(0)$ **domine toutes les autres richesses stochastiquement à l'ordre 2**.