

Annexe 4.- Dominance stochastique d'ordre 2

Nous ne donnons les démonstrations que pour deux richesses représentées par une variable continue bornée. Les notations sont celles qui ont été définies dans l'Annexe 1.

1.– Condition sur les intégrales

1. Partons de la formule établie dans l'Annexe 1:

$$W \succ W' \Leftrightarrow \int_m^M u'(s)[F(s) - G(s)]ds < 0$$

Intégrons par parties, en appliquant la formule

$$\int_m^M u'v' ds = [u'v]_m^M - \int_m^M u''v ds$$

avec

$$v(s) = \int_m^s [F(t) - G(t)]dt \quad v'(s) = F(s) - G(s)$$

soit

$$\begin{aligned} & \left[u'(s) \int_m^s [F(t) - G(t)]dt \right]_m^M - \int_m^M u''(s) \left(\int_m^s [F(t) - G(t)]dt \right) ds < 0 \\ & u'(M) \int_m^M [F(t) - G(t)]dt - u'(m) \int_m^m [F(t) - G(t)]dt - \int_m^M u''(s) \left(\int_m^s [F(t) - G(t)]dt \right) ds < 0 \end{aligned}$$

Au total, nous avons donc l'équivalence

$$W \succ W' \Leftrightarrow u'(M) \int_m^M [F(t) - G(t)]dt - \int_m^M u''(s) \left(\int_m^s [F(t) - G(t)]dt \right) ds < 0$$

Nous exprimons ainsi la relation de préférence par une relation entre la dérivée première, la dérivée seconde et les fonctions de répartition des deux richesses comparées. W domine stochastiquement W' à l'ordre 2 si l'inégalité précédente est vérifiée par toutes les fonctions u qui respectent l'hypothèse de non satiété et d'aversion pour le risque.

2. Limitons-nous au cas où les inégalités sont strictes ($u' > 0$ et $u'' < 0$).

– Il est immédiat de vérifier que si la richesse W domine W' à l'ordre 1, elle la domine également à l'ordre 2.

– Pour que l'inégalité précédente soit vérifiée par toute fonction u telle que $u' > 0$ et $u'' < 0$, il suffit que

$$\int_m^s [F(t) - G(t)]dt \leq 0$$

pour toute valeur de s , avec un ensemble de valeurs de s de probabilité non nulle pour lequel l'inégalité est stricte.

– Pour montrer que cette condition est également nécessaire, on fait le même raisonnement qu'au 1. de la deuxième étape de l'Annexe 1.

– Enfin, puisque pour les valeurs inférieures à m , $F(t) = G(t) (= 0)$, on peut remplacer m par $-\infty$, ce qui donne la condition indiquée dans le texte.

2. – Dominance et espérances

1. On démontre d'abord que $E(W) - E(W')$ et $\int_m^M [F(t) - G(t)]dt$ sont de signes opposés.

Par définition de l'espérance, en effet,

$$E(W) - E(W') = \int_m^M tf(t)dt - \int_m^M tg(t)dt$$

Intégrons par parties, en appliquant la formule

$$\int_m^M uv' dt = [uv]_m^M - \int_m^M u' v dt$$

avec

$$\begin{aligned} u &= t & u' &= 1 \\ v &= F(t) & v' &= f(t) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} E(W) - E(W') &= [tF(t)]_m^M - \int_m^M 1 \times F(t) dt - [tG(t)]_m^M + \int_m^M 1 \times G(t) dt \\ &= [M \times 1 - m \times 0] - \int_m^M F(t) dt - [M \times 1 - m \times 0] + \int_m^M G(t) dt \end{aligned}$$

soit

$$E(W) - E(W') = - \int_m^M [F(t) - G(t)] dt$$

2. Donc si $E(W) < E(W')$, $-\int_m^M [F(t) - G(t)] dt$ est négatif, $\int_m^M [F(t) - G(t)] dt$ est positif et il peut exister une fonction u telle que

$$u'(M) \int_m^M [F(t) - G(t)] dt - \int_m^M u''(s) \left(\int_m^s [F(t) - G(t)] dt \right) ds$$

soit positif. Donc, si l'espérance de W n'est pas supérieure ou égale à celle de W' , W ne domine pas W' à l'ordre 2.

3. Enfin, si on se limite aux richesses de même espérance, alors $\int_m^M [F(t) - G(t)] dt = 0$. Par conséquent, l'expression de la préférence n'implique plus que la dérivée seconde:

$$[W \succ W' \text{ et } E(W) = E(W')] \Leftrightarrow \int_m^M u''(s) \left(\int_m^s [F(t) - G(t)] dt \right) ds > 0$$

Mais la condition nécessaire et suffisante de dominance stochastique d'ordre 2 s'exprime exactement dans les mêmes termes que si les espérances sont inégales.