Annexe 3 – Approximation des primes de risque

Ces approximations reposent sur la décomposition de Taylor. Sous les hypothèses habituelles, cette décomposition s'écrit, pour une fonction $f(x)$ d'une seule variable, au point $x+h$,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

Considérons la fonction $u(w)$ au point w. Notons $E(W) = \mu$ pour alléger les écritures. Le h de la formule précédente s'écrit alors $w-\mu$, et la décomposition :

$$\begin{aligned} u(w) &= u(\mu + [w-\mu]) \\ &= u(\mu) + (w-\mu)u'(\mu) + \frac{(w-\mu)^2}{2!}u''(\mu) + \frac{(w-\mu)^3}{3!}u'''(\mu) + \ldots \end{aligned}$$

1. — Décomposition de Taylor d'une fonction d'utilité espérée.

La formule générale de décomposition de Taylor d'une fonction de plusieurs variables est beaucoup plus lourde. Mais elle se simplifie lorsque la fonction est une fonction d'utilité espérée. Montrons-le avec une richesse qui ne peut prendre que deux valeurs. Notons la fonction

$$E(u(W)) = f(w_1, w_2) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2)$$

Conservons la notation $\mu = E(W)$ et développons cette fonction autour du point (μ,μ). La formule de Taylor s'écrit alors

$$\begin{aligned} f(w_1,w_2) = f(\mu,\mu) & \\ &+ \frac{1}{1!}\left[(w_1-\mu)\, f_1(\mu,\mu) + (w_2-\mu)\, f_2(\mu,\mu)\right] \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(w_1-\mu)\, f_1(\mu,\mu) + (w_2-\mu)\, f_2(\mu,\mu)\right]^{(2)} \\ &+ \frac{1}{3!}\left[(w_1-\mu)\, f_1(\mu,\mu) + (w_2-\mu)\, f_2(\mu,\mu)\right]^{(3)} \\ &\ldots \\ &+ \frac{1}{r!}\left[(w_1-\mu)\, f_1(\mu,\mu) + (w_2-\mu)\, f_2(\mu,\mu)\right]^{(r)} \\ &\ldots \end{aligned}$$

où

- f_i désigne la dérivé de f par rapport à w_i,
- $\left[(w_1-\mu)\, f_1(\mu,\mu) + (w_2-\mu)\, f_2(\mu,\mu)\right]^{(2)}$ désigne le *carré symbolique* de $\left[(w_1-\mu)\, f_1(\mu,\mu) + (w_2-\mu)\, f_2(\mu,\mu)\right]$,

c'est-à-dire l'écriture condensée de la somme :

$$(w_1-\mu)^2\, f_{11}(\mu,\mu) + 2(w_1-\mu)(w_2-\mu)\, f_{12}(\mu,\mu) + (w_2-\mu)^2\, f_{22}(\mu,\mu)$$

où f_{ij} désigne la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial w_i \partial w_j}$.

- et $\left[(w_1-\mu)\, f_1(\mu,\mu) + (w_2-\mu)\, f_2(\mu,\mu)\right]^{(r)}$ la *puissance r-ième symbolique*, écriture condensée de la somme :

$$\sum_{\alpha=0}^{r} \frac{r!}{\alpha!(r-\alpha)!}(w_1-\mu)^{\alpha}(w_2-\mu)^{r-\alpha}\frac{\partial^r f}{\partial w_1^{\alpha}\partial w_2^{r-\alpha}}$$

Le **terme d'ordre 0** s'écrit :

$$f(\mu,\mu) = pu(\mu) + (1-p)u(\mu) = u(\mu)$$

Si la richesse peut prendre m valeurs, ce terme est toujours égal à $u(\mu)$:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i u(\mu) = u(\mu)$$

Il en va de même si elle peut prendre une infinité de valeurs, dénombrables ou non :

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i u(\mu) = u(\mu) \qquad \int_a^b f(w) u(\mu) dw = u(\mu)$$

Le **terme d'ordre 1** s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1!}\left[(w_1-\mu) f_1(\mu,\mu)+(w_2-\mu) f_2(\mu,\mu)\right] &= \left[(w_1-\mu) pu'(\mu)+(w_2-\mu)(1-p)u'(\mu)\right] \\ &= u'(\mu)\left[p(w_1-\mu)+(1-p)(w_2-\mu)\right] \\ &= u'(\mu)[0]=0\end{aligned}$$

Là encore, le résultat est complètement général, car la somme des écarts à l'espérance, pondérée par les probabilités, est toujours nulle.

Le **terme d'ordre 2** s'écrit :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2!}\left[(w_1-\mu) f_1(\mu,\mu)+(w_2-\mu) f_2(\mu,\mu)\right]^{(2)} \\ &= \frac{1}{2}\left[(w_1-\mu)^2 f_{11}(\mu,\mu)+2(w_1-\mu)(w_2-\mu) f_{12}(\mu,\mu)+(w_2-\mu)^2 f_{22}(\mu,\mu)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(w_1-\mu)^2 pu''(\mu)+2(w_1-\mu)(w_2-\mu)\times 0+(w_2-\mu)^2(1-p)u''(\mu)\right] \\ &= \frac{u''(\mu)}{2}\left[p(w_1-\mu)^2+(1-p)(w_2-\mu)^2\right] \\ &= \frac{u''(\mu)}{2}V(W)\end{aligned}$$

Là encore, le résultat est complètement général, car toutes les dérivées croisées sont nulles. Le terme qui multiplie la dérivée seconde est donc toujours la variance de W.

En passant aux termes d'ordre supérieur, on vérifie que la dérivée $u^{(r)}$ d'ordre r est toujours multipliée par le moment centré du même ordre. Au total donc, que la richesse soit discrète ou continue, en réécrivant explicitement l'espérance de W :

$$E(u(W)) = u(E(W)) + \frac{V(W)}{2}u''(E(W)) + \frac{\mu_3}{3!}u'''(E(W)) + \ldots + \frac{\mu_r}{r!}u^{(r)}(E(W)) + \ldots$$

2. — Prime de risque absolue

Si la richesse s'écrit $W = \omega + X$, par définition de la prime de risque absolue,

$$u(E(W)-\pi) = E(u(\omega+X))$$

Approximons le membre de gauche de cette égalité au voisinage de $E(W)$, selon la décomposition de Taylor d'une fonction d'une seule variable, en nous arrêtant au premier ordre :

$$u(E(W)-\pi) \simeq u(E(W)) - \pi u'(E(W))$$

Développons le membre de droite jusqu'au second ordre. La justification de cette différence de traitement est que les valeurs de $\omega + X$ peuvent être beaucoup plus éloignées de son espérance que ne l'est la prime :

$$E(u(\omega+X)) \simeq u(E(W)) + \frac{V(X)}{2}u''(E(W))$$

En égalisant ces deux développements, on obtient :

$$\pi \simeq -\frac{V(X)}{2}\frac{u''(E(W))}{u'(E(W))} = -\frac{V(W)}{2}\frac{u''(E(W))}{u'(E(W))}$$

3. — Prime de risque partielle

Si la richesse s'écrit $W = \omega' + \omega''(1+Z)$, par définition de la prime de risque partielle

$$u\left(E(W) - \omega''\pi''\right) = E\left(u\left(\omega' + \omega''(1+Z)\right)\right)$$

Approximons le membre de gauche de cette égalité au voisinage de $E(W)$, selon la décomposition de Taylor pour une fonction d'une seule variable, en nous arrêtant au premier ordre :

$$u\left(E(W) - \omega''\pi''\right) \simeq u\left(E(W)\right) - \omega''\pi''u'\left(E(W)\right)$$

Développons le membre de droite jusqu'au second ordre, avec la même justification que précédemment :

$$E\left(u\left(\omega' + \omega''(1+Z)\right)\right) \simeq u\left(E(W)\right) + \frac{\omega''^2 V(Z)}{2}u''\left(E(W)\right)$$

En égalisant ces deux développements, on obtient :

$$\pi'' \simeq -\frac{V(Z)}{2}\omega''\frac{u''(E(W))}{u'(E(W))}$$

4. — Prime de risque relative

Si la richesse s'écrit $W = \omega(1+Y)$, nous sommes dans le cas particulier de risque partiel où $\omega' = 0$ et $\omega'' = \omega$, ce qui nous donne directement

$$\pi' \simeq -\frac{V(Y)}{2}\omega\frac{u''(E(W))}{u'(E(W))}$$