# Annexe 2.- L'inégalité de Jensen

**1**. L'équation de la tangente d'une fonction $u(w)$ dérivable au point $w_0$ s'écrit

$$y = aw + b \quad \text{avec} \quad a = u'(w_0) \quad \text{et} \quad b = u(w_0) - u'(w_0)w_0$$
$$= u(w_0) + u'(w_0)(w - w_0)$$

**2**. L'équation de la tangente d'une fonction dérivable au point $w_0 = E(W)$ s'écrit

$$y = u(E(W)) + u'(E(W))(w - E(W))$$

**3**. Si *u* est strictement concave, tous les points situés sur n'importe quelle tangente sont au dessus de tous les points du graphe de *u*, sauf le point de tangence, qui est commun.

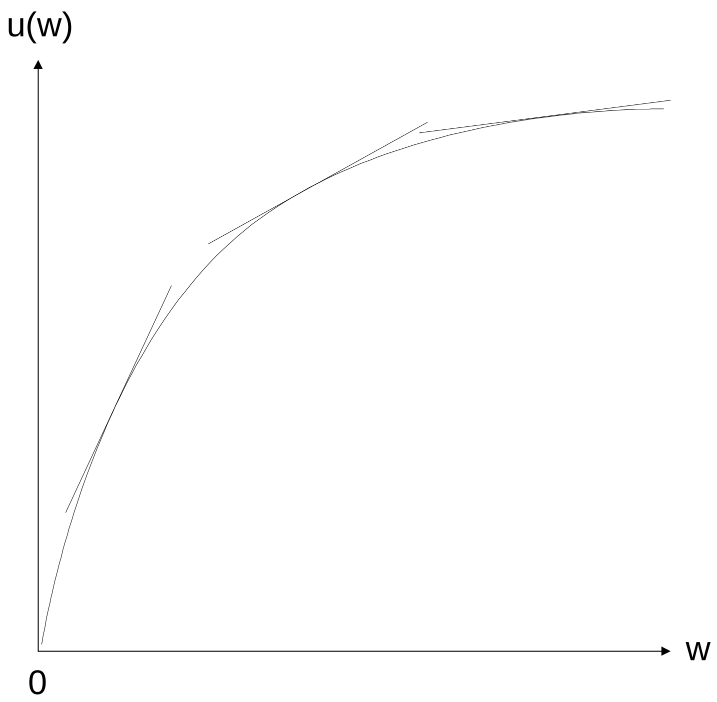


**Figure A.2 – Une fonction concave est toujours entièrement sous une de ses tangentes**.

Ceci est donc vrai en particulier au point $w_0 = E(W)$. Par conséquent

$$\underbrace{u(E(W)) + u'(E(W))(w - E(W))}_{\text{point sur la tangente}} \quad \geq \quad \underbrace{u(w)}_{\text{point de même abscisse sur la courbe}}$$

avec égalité uniquement au point $w = E(W)$. Donc, si $W$ prend au moins 2 valeurs distinctes, l'espérance du membre de gauche, moyenne pondérée par les probabilités de $W$, est strictement supérieure à l'espérance du membre de droite, calculée avec les mêmes probabilités

$$E[u(E(W)) + u'(E(W))(w - E(W))] > E[u(W)]$$
$$u(E(W)) + u'(E(W))(E(W) - E(W)) > E[u(W)]$$
$$u(E(W)) > E[u(W)]$$

Le signe d'inégalité est inversé si la fonction est strictement convexe. C'est un signe d'égalité si la fonction est affine. Nous énoncerons donc l'inégalité de Jensen dans les termes suivants:

**Si** $W$ **est une variable aléatoire et** $u$ **une fonction strictement concave**, **alors** $E(u(W)) < u(E(W))$.

**Si** $W$ **est une variable aléatoire et** $u$ **une fonction strictement convexe**, **alors** $E(u(W)) > u(E(W))$.

**Si** $W$ **est une variable aléatoire et** $u$ **une fonction affine**, **alors** $E(u(W)) = u(E(W))$.