

Annexe 1.- Dominance stochastique d'ordre 1

Nous ne donnons la démonstration que pour des richesses représentées par une variable aléatoire continue bornée.

1. Première étape

Soit la richesse W , dont les valeurs possibles sont comprises entre a et b . Notons sa densité de probabilité $f(t)$ et sa fonction de répartition $F(t)$. Comparons-la à la richesse W' , dont les valeurs possibles sont comprises entre a' et b' , de densité de probabilité $g(t)$ et de fonction de répartition $G(t)$.

Si les préférences sont représentées par une fonction d'utilité espérée, on a les équivalences suivantes:

$$W \succ W' \Leftrightarrow E(u(W)) > E(u(W')) \Leftrightarrow \int_a^b u(t)f(t)dt > \int_{a'}^{b'} u(t)g(t)dt$$

Notons à présent m la plus petite des deux bornes inférieures a et a' et M la plus grande des deux bornes supérieures b et b' . La dernière inégalité peut s'écrire

$$\int_m^M u(t)[f(t) - g(t)]dt > 0$$

Intégrons par parties, en appliquant la formule

$$\int_m^M uv' dt = [uv]_m^M - \int_m^M u' v dt$$

et en posant

$$\begin{aligned} u &= u(t) & u' &= u'(t) \\ v &= F(t) - G(t) & v' &= f(t) - g(t) \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} [u(t)[F(t) - G(t)]]_m^M - \int_m^M u'(t)[F(t) - G(t)]dt &> 0 \\ u(M)[F(M) - G(M)] - u(m)[F(m) - G(m)] &> \int_m^M u'(t)[F(t) - G(t)]dt \\ u(M)[1 - 1] - u(m)[0 - 0] &> \int_m^M u'(t)[F(t) - G(t)]dt \end{aligned}$$

Au total, nous avons donc l'équivalence

$$W \succ W' \Leftrightarrow \int_m^M u'(t)[F(t) - G(t)]dt < 0$$

Nous exprimons ainsi la relation de préférence entre deux richesses par une relation entre l'utilité marginale et les fonctions de répartition des deux richesses. W domine stochastiquement W' à l'ordre 1 si l'inégalité précédente est vérifiée par toutes les fonctions u qui respectent l'hypothèse de non satiété.

2. Deuxième étape

Voyons les différents cas possibles:

- Supposons d'abord l'hypothèse de non satiété satisfaite de manière stricte ($u' > 0$).
 - Pour que l'inégalité soit vraie, il suffit que $F(t) \leq G(t)$ pour tout t , l'inégalité étant stricte pour un ensemble de valeurs de t de probabilité non nulle (si l'inégalité n'était jamais stricte, les deux richesses seraient confondues et tous les agents seraient indifférents entre elles).

– Cette condition est également nécessaire. Supposons en effet qu'il existe un intervalle $[g, h]$ tel que si $t \in [g, h]$, alors $F(t) > G(t)$. Alors

$$\int_g^h u'(t)[F(t) - G(t)]dt > 0$$

Or on peut toujours construire une fonction telle que l'utilité marginale u' soit suffisamment faible en dehors de l'intervalle $[g, h]$ et suffisamment forte sur cet intervalle pour que

$$\int_g^h u'(t)[F(t) - G(t)]dt > \int_m^h u'(t)[F(t) - G(t)]dt + \int_g^M u'(t)[F(t) - G(t)]dt$$

et donc telle que W' soit préférée à W .

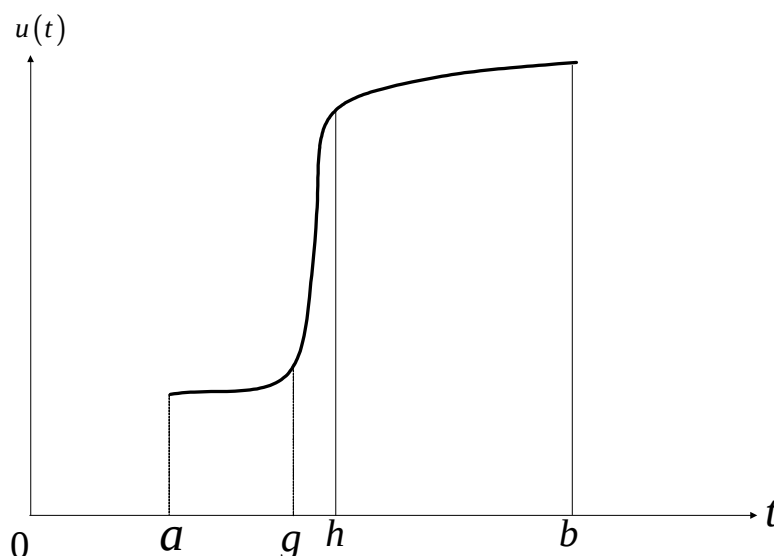


Figure A.1 – L'utilité marginale est partout positive, mais très forte entre g et h , et très faible pour les autres valeurs.

2. Si $u' \geq 0$, l'inégalité $F(t) \leq G(t)$ doit être stricte pour toute valeur de t appartenant à $]m, M]$ (m doit être exclu puisque $F(m) = G(m)$ ($= 0$)).
3. Enfin, si on se contente d'une condition de dominance stochastique au sens large, la condition s'écrit

$$W \geq W' \Leftrightarrow \int_m^M u'(t)[F(t) - G(t)]dt \leq 0$$

Par conséquent, il faut et il suffit que $F(t) \leq G(t)$ quel que soit t , que $u' > 0$ ou $u' \geq 0$.

Au total, les quatre cas possibles sont résumés dans le tableau suivant:

	dominance stricte	dominance large
$u' > 0$	$F(t) \leq G(t)$ l'inégalité étant stricte pour un ensemble de valeurs de t de probabilité non nulle	$F(t) \leq G(t)$ $\forall t$
$u' \geq 0$	$F(t) < G(t)$ $\forall t \in]m, M]$	$F(t) \leq G(t)$ $\forall t$

La formule retenue dans le texte est la condition de dominance stricte, sous l'hypothèse de non satiété stricte.

3. Dominance et espérances

On retrouve la condition nécessaire mais non suffisante démontrée dans le paragraphe 4.3.1. En effet, puisque

$$W \succ_{S_1} W' \Leftrightarrow \int_m^M u(t)[f(t) - g(t)]dt > 0 \quad \text{pour toute fonction } u \text{ croissante}$$

l'inégalité est vraie en particulier pour la fonction $u(t) = t$. Par conséquent

$$\int_m^M t[f(t) - g(t)]dt > 0 \Leftrightarrow E(u(W)) > E(u(W'))$$

Une richesse W ne peut pas dominer une richesse W' à l'ordre 1 si elle n'a pas une espérance supérieure.